DIFFERENZE FINITE:

9/11/2012
TABLINO
LABORATORIO
(1E)

PROBLEMA: $\begin{cases} -(cu')' = f & \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{Dirichlet omogenee} \end{cases}$

Per semplificare consideriamo $-u'' = f$

facciamo l'hp che u sia sufficientemente regolare;

$$\circledast \quad \left.\begin{aligned} u(\tilde{x}+h) &= u(\tilde{x}) + h u'(\tilde{x}) + \frac{h^2}{2} u''(\tilde{x}) + \frac{h^3}{6} u'''(\tilde{x}) + O(h^4) \\ u(\tilde{x}-h) &= u(\tilde{x}) - h u'(\tilde{x}) + \frac{h^2}{2} u''(\tilde{x}) - \frac{h^3}{6} u'''(\tilde{x}) + O(h^4) \end{aligned}\right\} +$$

$$u(\tilde{x}+h) + u(\tilde{x}-h) = 2u(\tilde{x}) + h^2 u''(\tilde{x}) + O(h^4)$$

e quindi ottengo:

$$u''(x)\Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{u(\tilde{x}+h) - 2u(\tilde{x}) + u(\tilde{x}-h)}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{SECOND DIFFERENCE} \quad \Delta^2 u$$

Allo stesso modo si ricava:

$$u'(x)\Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{u(\tilde{x}+h) - u(\tilde{x})}{h} + O(h) \qquad \text{FORWARD DIFFERENCE} \quad \Delta_+ u$$

$$u'(x)\Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{u(\tilde{x}) - u(\tilde{x}-h)}{h} + O(h) \qquad \text{BACKWARD DIFFERENCE} \quad \Delta_- u$$

Possiamo anche pensare a u'' come $(u')'$, e quindi

$$\Delta^2 u = \Delta_- \Delta_+ u = \frac{1}{h}\left\{ \Delta_+ u(x)\Big|_{x=\tilde{x}} - \Delta_+ u(x-h)\Big|_{x=\tilde{x}} \right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{u(\tilde{x}+h) - u(\tilde{x})}{h} - \frac{u(\tilde{x}) - u(\tilde{x}-h)}{h} \right)$$

e otteniamo la formula di prima.

Ci può sembrare brutto che noi abbiamo un'approssimazione per la derivata seconda di 2° ordine e una per la prima del 1°.

Da $\circledast$ possiamo fare $\ominus$ e ottenere:

$$u(\tilde{x}+h) - u(\tilde{x}-h) = 2h\, u'(\tilde{x}) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \quad u'(x)\Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{u(\tilde{x}+h) - u(\tilde{x}-h)}{2h} + O(h^2) \qquad \text{CENTERED DIFFERENCE}$$

Consideriamo il problema $\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

$N+1$ nodi
$h = \frac{1}{N}$

considero l'approssimazione $u_i \simeq u(x_i)$ e ho

$$-u'' = 1 \longrightarrow \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = 1 \qquad i = 1, \dots, N-1$$

La matrice è nella forma

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & N-1 & N \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} \cancel{-1} & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \cancel{-1} \end{array}\right]$$

li tolgo perchè ho condizioni di bordo di Dirichlet

Quindi il nostro problema è diventato quello di risolvere un sistema lineare:

$$A_n u = h^2 \cdot 1$$

con $A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (Toeplitz)

def: Diciamo che $A=(a_{ij})$ è **TOEPLITZ** se è della forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & \ddots & \ddots & a_{-2} \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ \vdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

cioè è costante sulle sopra/sotto diagonali (può essere anche piena)

Il nostro esempio è molto facile e possiamo anche calcolare la soluzione esatta:

$$u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$

La soluzione che DF (differenze finite) è $u_i = \frac{1}{2} ih(1-ih)$ $\quad x_i = ih$.

Ora supponiamo di non avere i nodi equispaziati. Supponiamo di avere: $\underset{\tilde{x}-e}{|} \overset{e}{\text{———}} \underset{\tilde{x}}{|} \overset{r}{\text{———}} \underset{\tilde{x}+r}{|}$. Abbiamo:

$$u'(x)\Big|_{x=\tilde{x}} \cong \frac{u(\tilde{x}+r)-u(\tilde{x}-e)}{e+r} \qquad \text{infatti:}$$

riscrivendo gli sviluppi di $u(\tilde{x}+r)$ e $u(\tilde{x}-e)$ e sottraendo abbiamo:

$$u(\tilde{x}+r)-u(\tilde{x}-e) = (r+e)u'(\tilde{x}) + \frac{1}{2}(r^2-e^2)u''(\tilde{x}) + O(r^3)+O(e^3)$$

$$\Rightarrow u'(x)\Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{u(\tilde{x}+r)-u(\tilde{x}-e)}{r+e} + O(r-e)$$

Ora siamo pronti a discretizzare il nostro problema con il coefficiente di diffusione c:

$$\begin{cases} -(cu')' = f & \text{in } \Omega=(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Consideriamo una funzione $w(x) = c(x)u'(x)$ e la partizione fatta così: $\underset{x_{i-1}}{|} \; h_{i-1} \; \underset{x_i}{|} \; h_i \; \underset{x_{i+1}}{|}$

Andiamo a considerare anche i pti medi dell'intervallino: $x_i - \frac{h_{i-1}}{2}$, $x_i + \frac{h_i}{2}$

e scriviamo la con la formula di prima con $e = \frac{h_{i-1}}{2}$ e $r = \frac{h_i}{2}$

$$\Rightarrow w'(x) \cong \frac{1}{\frac{h_{i-1}}{2}+\frac{h_i}{2}}\left(w\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right) - w\left(x_i-\frac{h_{i-1}}{2}\right)\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{2}{h_{i-1}+h_i}\left(c\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)u'(x)\Big|_{x=x_i+\frac{h_i}{2}} - c\left(x_i-\frac{h_i}{2}\right)u(x)\Big|_{x=x_i+\frac{h_{i-1}}{2}}\right)$$

Ora facciamo la stessa cosa per u' con $\ell = r = h_i/2$ per la 1ª u' e $\ell = r = \frac{h_{i-1}}{2}$ per la seconda u':

$$\simeq \frac{2}{h_i+h_{i-1}} \left\{ c\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right) \frac{u(x_{i-1})-u(x_i)}{\frac{h_i}{2}+\frac{h_i}{2}} - c\left(x_i-\frac{h_{i-1}}{2}\right) \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\frac{h_{i-1}}{2}+\frac{h_{i-1}}{2}} \right\}$$

$$= \frac{-2}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)} c\left(x_i-\frac{h_{i-1}}{2}\right) u_{i-1} + \frac{2}{h_{i-1}+h_i} \left(\frac{c\left(x_i-\frac{h_{i-1}}{2}\right)}{h_{i-1}} + \frac{c\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)}{h_i} \right) u_i +$$

$$- \frac{2}{h_i(h_{i-1}+h_i)} c\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right) u_{i+1}$$

Quindi ho ottenuto lo stesso una matrice A_n che è sempre tridiagonale, anche se più bruttina di prima :(

Abbiamo $A_n = D\hat{A}_n$ con $D = \mathrm{diag}\left(\frac{2}{h_{i-1}+h_i}\right)$

così possiamo usare una matrice più semplice togliendo le parti dei coeff uguali per tutta la riga

$$\rightsquigarrow \tilde{A}_n u = D^{-1} f_n$$

N.B. $n \neq N$, n indica la dimensione effettiva di n che potrebbe essere minore di N

Abbiamo che A_n (e anche $\tilde{A}_n$) è simmetrica (non lo verifica ma basta fare i conti).

A_n è anche definita positiva. Negli elementi finiti veniva gratis dalla coercività del problema, per le differenze finite no.

def: Diciamo che $A = (a_{ij})$ è DDD **DIAGONALE DOMINANTE** in senso **DEBOLE** se:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \text{ed } \exists\, \bar{i} \text{ t.c. vale } >$$

OSS: A_n è DDD.

def: $A = (a_{ij})$ è **RIDUCIBILE** se $\exists\, \Pi$ permutazione t.c.

$$\Pi A \Pi^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

OSS: Se A è riducibile posso disaccoppiare il sistema $Ax=b$, scrivo $x = [x_1 | x_2]^T$ $b = [b_1 | b_2]^T$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$\leftarrow$ risolvo prima il secondo e poi il primo spostando a t.n $A_{12}x_2$

def: Se A non è riducibile si dice **IRRIDUCIBILE**.

* guardare Ferrario

Se pensiamo al grafo indotto da A ($\exists\, i \longrightarrow j$ se $a_{ij} \neq 0$) abbiamo che A è (ir)riducibile* sse $\forall\, ij$ punti posso trovare un cammino che connette i, j.

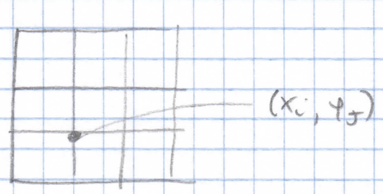
? WHAT? NON DOBBIAMO SAPERLO DAVVERO

Dai teoremi di Gershgorin segue che A è semi def pos (perché è DDD + irriducibile)

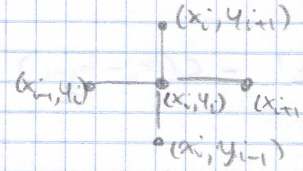
Ora passiamo al caso 2D.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(c\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(cu_x)_x - (cu_y)_y = f$$



Nel caso 2D useremo la notazione della formula a 5 punti



Vediamo come diventa la matrice A:

$$-\Delta u \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -I & & & \\ -I & \tilde{A} & -I & & \\ & -I & \tilde{A} & -I & \\ & & -I & \tilde{A} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi A è tridiagonale a blocchi con blocchi tridiagonali. (riflessione su perchè esce così: in pratica perchè quando faccio la der risp a x ho un $-1, 2, -1$ e poi risp a y ho $+2 \rightsquigarrow 4$ sulla diag e altri 2 -1)